Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy,
2015, vol. 25, no. 3, pp. 542–549. ISSN 1993-3541

Известия Иркутской государственной экономической академии.
2015. Т. 25, № 3. С. 542–549. ISSN 1993-3541

MATHEMATICAL MODELING, SYSTEMS ANALYSIS

УДК 519.626
DOI 10.17150/1993-3541.2015.25(3).542-549

Е. В. АКСЕНЮШКИНА
Байкальский государственный университет экономики и права,
г. Иркутск, Российская Федерация

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ФИНАНСОВОЙ ПОЛИТИКИ ФИРМЫ

Аннотация. В статье формулируется и решается задача о формировании кредитной политики фирмы и таком распределении прибыли на инвестиции (процентный рост) и потребление (дивиденды), чтобы обеспечить максимальный объем потребления за некоторый период планирования. Рассматривается ситуация, когда некоторая фирма (например, банк) осуществляет свою деятельность на кредитно-финансовом рынке. Поясним механизм этой деятельности. Фирма имеет некоторый собственный капитал (собственные средства), который складывается из средств владельцев фирмы, накопленных за период существования. Далее фирма может привлекать средства клиентов, например, в виде вкладов по некоторой процентной ставке, неся при этом расходы по выплате процентов за использование этих средств. Итак, имея в своем распоряжении собственные и привлеченные средства, фирма может разместить их (к примеру, в качестве выдаваемых кредитов) по существующей процентной ставке, получая, тем самым, некоторый доход. Описанная ситуация формализуется в рамках билинейной задачи оптимального управления. В таких задачах, вообще говоря, принцип максимума является только необходимым условием оптимальности и выделяет экстремальные управления, которые подозрительны на оптимальность. С учетом специфики задачи показывается, что управления, удовлетворяющие принципу максимума, являются сильно экстремальными, что согласно известным достаточным условиям обеспечивает их оптимальность. В результате рассматриваемая билинейная задача полностью решается на основе принципа максимума.

Ключевые слова. Билинейная задача; принцип максимума; оптимальное управление; сильно экстремальное управление; принцип максимума.

Информация о статье. Дата поступления 9 февраля 2015 г.; дата принятия к печати 23 марта 2015 г.; дата онлайн-размещения 30 июня 2015 г.

E. V. AKSENYUSHKINA
Baikal State University of Economics and Law,
Irkutsk, Russian Federation

THE PROBLEM OF OPTIMAL PLANNING OF COMPANY'S FINANCIAL POLICY

Abstract. The article has the following tasks formulated and solved: company's credit policy formation and distribution of profits on investments (percent growth) and consumption (dividends) intended to ensure maximum consumption in a certain period of planning. The situation when a firm (for example, a bank) operates on the credit and financial market is considered. Let us clarify the mechanism of such activitiy. The company has some own capital (equity) which is composed of company's owners assets accumulated during the period of company's existence. Then the company can attract customer funds, such as deposits at some interest rate that entails interest expenses for the use of these funds. So, having own and borrowed funds at its disposal, the company can place them (for example, as loans) at the existing interest and still get some income. This situation is formalized within the bilinear optimal control problem. In such problems the maximum principle is the only necessary condition for optimality and highlights the extreme controls that are suspicious for optimality. Considering the specificity of the problem, it is showed that controls satisfying the maximum principle are highly extreme that, according to well-known sufficient conditions, ensures their optimum. As a result, the considered bilinear problem is solved on the basis of the maximum principle.

Keywords. Bilinear problems; maximum principle; optimal control; strongly extreme management.

Article info. Received February 9, 2015; accepted March 23, 2015; available online June 30, 2015.

Исследования по достаточным условиям оптимальности в рамках формализма принципа максимума Понтрягина имеют давнюю историю, но сохраняют свою актуальность [1–12]. В этом плане безусловно выделяются выпуклые задачи, для которых принцип максимума является критерием оптимальности, что обеспечивает возможность их эффективного решения. На этом фоне выделим публикации [8; 9], в которых введено понятие сильно экстремальных управлений, имеющее существенное значение применительно к рассматриваемой задачи.

Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy,
2015, vol. 25, no. 3, pp. 542–549. ISSN 1993-3541

Известия Иркутской государственной экономической академии.
2015. Т. 25, № 3. С. 542–549. ISSN 1993-3541

Основная задача. Достаточное условие оптимальности. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления относительно переменных $t \in T = [t_0, t_1]$, $u(t) \in R^m$, $x(t) \in R^n$:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t), u(t), t)dt \to \min,\ u \in V \quad (P_1)$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \qquad x(t_0) = x^0,$$

$$V = \{u(\cdot) \in PC(T):\ u(t) \in U,\ t \in T\}.$$

Введем первый набор предположений:

– терминальная функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на R^n;

– функция $F(x, u, t)$ и вектор-функция $f(x, u, t)$ непрерывны по совокупности своих аргументов на $R^n \times R^m \times T$ вместе с частными производными $F_x(x, u, t)$, $f_x(x, u, t)$;

– множество $U \subset R^m$ компактно.

Образуем функцию Понтрягина с сопряженной переменной $\psi \in R^n$

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi,\ f(x, u, t) \rangle - F(x, u, t).$$

Определим сопряженную задачу

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x, u, t), \qquad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)).$$

Пусть $u(t)$, $t \in T$ — допустимое управление в задаче (P_1), $x(t, u)$, $\psi(t, u)$ — соответствующие решения фазовой и сопряженной систем. Введем множество экстремальных управлений задачи (P_1) относительно принципа максимума

$$Ext(P_1) = \{u(\cdot) \in PC(T):\ u(t) =$$
$$= \operatorname*{argmax}_{w \in U} H(\psi(t, u), x(t, u), w, t),\ t \in T\}.$$

Пусть $X \subset R^n$ — выпуклое множество, содержащее все фазовые траектории управляемой системы:

$$x(t, u) \in X, \quad t \in T, \quad u \in V.$$

Внесем дополнительное предположение по части функционала Φ (условие выпуклости): функция $\varphi(x)$ выпукла на X.

Дальнейший анализ задачи проводится на основе формулы приращения функционала Φ, которая ранее использовалась для построения методов фазовой линеаризации [8]. Пусть $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ — допустимые управления; $\Delta x(t) = x(t, v) - x(t, u)$ — соответствующее фазовое приращение. Тогда формула имеет вид

$$\Delta_v \Phi(u) = -\int_T \Delta_{v(t)} H(\psi(t, u), x(t, v), u(t), t)dt + \eta_1, \quad (1)$$

где $\eta_1 = o_\phi(\| \Delta x(t_1) \|) - \int_T o_H^{(1)}(\| \Delta x(t) \|)dt.$

Здесь приняты обычные обозначения для приращений

$$\Delta_v \Phi(u) = \Phi(v) - \Phi(u),$$

$$\Delta_v H(\cdot, \cdot, u, t) = H(\cdot, \cdot, v, t) - H(\cdot, \cdot, u, t).$$

Остаточные величины o_φ, $o_H^{(1)}$ имеют следующий смысл (остатки линеаризации):

$$\varphi(x(t_1, u) + \Delta x(t_1)) - \varphi(x(t_1, u)) =$$
$$= \langle \varphi_x(x(t_1, u)),\ \Delta x(t_1) \rangle + o_\varphi(\| \Delta x(t_1) \|),$$

$$H(\psi(t, u), x(t, u) + \Delta x(t), u(t), t) -$$
$$- H(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t) =$$
$$= \langle H_x(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t), \Delta x(t) \rangle +$$
$$+ o_H^{(1)}(\| \Delta x(t) \|).$$

На основании формулы приращения (1) докажем условие оптимальности для экстремальных управлений с дополнительными свойствами.

Определение 1. Управление $u(\cdot) \in Ext(P_1)$ назовем сильно экстремальным, если

$$u(t) = \operatorname*{argmax}_{w \in U} H(\psi(t, u), x(t, v), w, t)$$

для любых $t \in T$, $v \in V$.

Таким образом, сильно экстремальное управление максимизирует функцию H на соответствующей ему сопряженной траектории $\psi(t, u)$ и множестве фазовых траекторий $x(t, v)$, $v \in V$.

Введем в рассмотрение функцию

$$H^{(1)}(x, t) = H(\psi(t, u), x, u(t), t), \quad x \in X, \quad t \in T$$

относительно управления $u \in V$.

Теорема. Пусть управление $u(t)$, $t \in T$ является сильно экстремальным и функция $H^{(1)}(x, t)$ $\forall t \in T$ вогнута по x на X. Тогда управление $u(t)$ является оптимальным в задаче (P_1).

Доказательство. Рассмотрим формулу приращения (1). С учетом выпуклости функции $\varphi(x)$ и вогнутости функции $H^{(1)}(x, t)$ по $x \in X$ получаем

$$o_\varphi(\| \Delta x(t_1) \|) \geq 0, \qquad o_H^{(1)}(\| \Delta x(t) \|) \leq 0.$$

Следовательно, имеет место оценка приращения

$$\Delta_v \Phi(u) \geq \int_T \Delta_{u(t)} H(\psi(t, u),\ x(t, v),\ v(t),\ t)dt.$$

Согласно определению сильно экстремального управления выполняется неравенство

$$\int_T \Delta_{u(t)} H(\psi(t, u), x(t, v), v(t), t)dt \geq 0,$$

$$\forall t \in T,\ v \in V.$$

Теорема доказана.

Проведем обсуждение результата.

Пусть в задаче (P_1) переменные x, u разделены, т. е.

$$F(x, u, t) = F_1(x, t) + F_2(u, t),$$

$$f(x, u, t) = f^{(1)}(x, t) + f^{(2)}(u, t).$$

Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy,
2015, vol. 25, no. 3, pp. 542–549. ISSN 1993-3541

Известия Иркутской государственной экономической академии.
2015. Т. 25, № 3. С. 542–549. ISSN 1993-3541

Тогда аналогичную структуру имеет функция Понтрягина

$$H(\psi,\ x,\ u,\ t) = H_1(\psi,\ x,\ t) + H_2(\psi,\ u,\ t).$$

Следовательно, любое экстремальное управление определяется соотношением

$$u(t) = \operatorname*{argmax}_{w \in U} H_2(\psi(t,\ u),\ w,\ t), \quad t \in T,$$

т. е. является сильно экстремальным.

Таким образом, в задаче (P_1) с разделенными переменными x, u условие вогнутости функции $H_1(\psi(t,\ u),\ x,\ t)$ по $x \in X$ является достаточным условием для оптимальности экстремального управления $u(t)$.

Пусть задача (P_1) является выпуклой, т. е.

$$F(x,\ u,\ t) = F_1(x,\ t) + F_2(u,\ t),$$

$$f(x,\ u,\ t) = A(t)x + b(u,\ t),$$

причем функция $F_1(x,\ t)$ $\forall t \in T$ выпукла по $x \in R^n$. В этом случае функция

$$H_1(\psi,\ x,\ t) = \langle \psi, A(t)x \rangle - F_1(x,\ t)$$

является вогнутой по $x \in R^n$ $\forall \psi \in R^n$, $t \in T$. Следовательно, принцип максимума для выпуклой задачи есть достаточное условие оптимальности.

Рассмотрим далее задачу (P_1) со следующим условиями

$$F(x,\ u,\ t) = F_1(x,\ t) + < a(u,\ t),\ x > + F_2(u,\ t),$$

$$f(x,\ u,\ t) = A(u,\ t)x + b(u,\ t),$$

где $F_1(x, t)$ выпукла по $x \in R^n$.

В этом случае функция Понтрягина $H(\psi,\ x,\ u,\ t)$ по-прежнему является вогнутой по $x \in R^n$ $\forall \psi \in R^n$, $u \in U$, $t \in T$. Следовательно, в задаче (P_1) любое сильно экстремальное управление является оптимальным.

Поставим задачу оптимального планирования со следующими переменными:

$t \in [0, T]$ — время;

$x(t)$ — собственные средства фирмы в момент времени t, которые могут быть использованы на инвестиции и потребление;

$y(t)$ — привлеченные средства (например, кредит) в момент времени t;

$r_1 \in (0,\ 1]$ — процентная ставка по инвестициям;

$r_2 \in (0,\ 1]$ — процентная ставка по привлечению средств;

$v(t) \in [0,\ 1]$ — доля собственных средств, идущая на инвестиции в момент времени t;

$u(t) \in [0,\ 1]$ — отношение привлеченных средств к собственным в момент t (объем привлеченных средств не превосходит собственные)

$$u(t) = \frac{y(t)}{x(t)}.$$

Тогда величину $x(t)$ можно представить в следующем виде (кредит $y(t)$ расходуется только на инвестиции после уплаты процентов):

$$x(t) = x(0) + r_1 \int_0^t x(\tau)v(\tau)d\tau +$$

$$+ r_1 \left(\int_0^t y(\tau)d\tau - r_2 \int_0^t y(\tau)d\tau \right) =$$

$$= x(0) + r_1 \int_0^t x(\tau)v(\tau)d\tau + r_1 (1 - r_2) \int_0^t x(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Обозначим $r = r_1$, $c = 1 - r_2$, $0 < c < 1$. Следовательно, собственные средства фирмы можно записать в виде

$$x(t) = x(0) + r \int_0^t x(\tau)[v(\tau) + cu(\tau)]d\tau.$$

В результате дифференцирования получаем фазовое уравнение

$$\dot{x} = r(cu + v)x$$

с начальным условием $x(0) = x_0$.

Сформируем целевой функционал, подлежащий максимизации:

$$\Phi(u, v) = \int_0^T (1 - v(t))x(t)dt - \int_0^T u(t)x(t)dt.$$

По содержательному смыслу это разность между собственными средствами фирмы, направленными на потребление, и привлеченными средствами за период $[0,\ T]$.

Примем предположение об обесценивании со временем капитала фирмы. Пусть $\rho > 0$ — параметр дисконтирования, причем $\rho < r$. Тогда с учетом фактора обесценивания средств, запланированных на потребление, целевой функционал примет окончательный вид

$$\Phi(u, v) = \int_0^T e^{-\rho t}(1 - u(t) - v(t))x(t)dt.$$

В результате приходим к задаче оптимального управления на максимум потребления

$$\Phi(u,\ v) = \int_0^T e^{-\rho t}(1 - u - v)x dt \to \max, \qquad (P_2)$$

$$\dot{x} = r(cu + v)x,\ x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in [0,\ 1],\ \ v(t) \in [0,\ 1],$$

$$x_0 > 0,\ \ \rho > 0,\ \ r \in (0,\ 1],\ \ \rho < r,\ \ c \in (0,\ 1).$$

Введем множество допустимых управлений

$$W = \{ w(\cdot) \in PC([0,\ T]):\ w(t) \in [0,\ 1],\ \ t \in [0,\ T] \}.$$

Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy,
2015, vol. 25, no. 3, pp. 542–549. ISSN 1993-3541

Известия Иркутской государственной экономической академии.
2015. Т. 25, № 3. С. 542–549. ISSN 1993-3541

Решение фазового уравнения, соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, представляется по формуле Коши

$$x(t,\ u,\ v) = x_0 e^{r\int_0^t (cu(\tau)+v(\tau))d\tau}.$$

Следовательно, все фазовые траектории положительны

$$x(t,\ u,\ v) > 0, \qquad t \in [0,\ T].$$

Пусть X — множество фазовых траекторий в задаче (P_2).

Процедура решения задачи. Проведем анализ задачи на основе принципа максимума. Составим функцию Понтрягина

$$H(\psi,\ x,\ u,\ v) = \psi r(cu+v)x + (1-u-v)x =$$
$$= H_u(\psi,\ x)u + H_v(\psi,\ x)v + x$$

и сопряженное уравнение

$$\dot{\psi} = \rho\psi - H_x = (1-\psi rc)u + (1-\psi r)v + \rho\psi - 1$$

с условием $\psi(T) = 0$.

Пусть $u(t),\ v(t) \in W,\ t \in [0,\ T],\ x(t,\ u,\ v),\ \psi(t,\ u,\ v)$ — соответствующие решения фазового и сопряженного уравнений. Экстремальные управления задачи относительно принципа максимума имеют вид

$$u(t) = \arg\max_{w\in[0,\ 1]} H_u(\psi(t,\ u,\ v),\ x(t,\ u,\ v))w, \quad (2)$$

$$v(t) = \arg\max_{w\in[0,\ 1]} H_v(\psi(t,\ u,\ v),\ x(t,\ u,\ v))w.$$

Конкретизируем понятие сильно экстремальных управлений применительно к задаче (P_2).

Определение 2. Экстремальные управления $u(t),\ v(t),\ t \in [0,\ T]$ назовем сильно экстремальными, если

$$u(t) = \arg\max_{w\in[0,\ 1]} H_u(\psi(t,\ u,\ v),\ x(t))w,$$
$$\forall\ x(t) \in X,\quad t \in [0,\ T],$$
$$v(t) = \arg\max_{w\in[0,\ 1]} H_v(\psi(t,\ u,\ v),\ x(t))w,$$
$$\forall\ x(t) \in X,\quad t \in [0,\ T].$$

Таким образом, сильно экстремальное управление $(u(t),\ v(t))$ максимизирует функцию H на соответствующей ему сопряженной траектории $\psi(t,\ u,\ v)$ и множестве X фазовых траекторий.

На основании предыдущего имеет место следующее утверждение, применительно к рассматриваемой задаче: любое сильно экстремальное управление является оптимальным в задаче (P_2).

В нашем случае общие задачи на поиск экстремальных управлений представляются в виде

$$H_u(\psi,\ x)w \to \max,\ \ w \in [0,\ 1],$$
$$H_v(\psi,\ x)w \to \max,\ \ w \in [0,\ 1]$$

и решаются аналитически. В частности, для экстремальных управлений $u(t)$ и $v(t)$ согласно формуле (2) получаем явное выражение

$$u(t) = \begin{cases} 0, & (\psi(t,\ u,\ v)rc - 1)x(t,\ u,\ v) \le 0 \\ 1, & (\psi(t,\ u,\ v)rc - 1)x(t,\ u,\ v) > 0 \end{cases}; \quad (3)$$

$$v(t) = \begin{cases} 0, & (\psi(t,\ u,\ v)r - 1)x(t,\ u,\ v) \le 0 \\ 1, & (\psi(t,\ u,\ v)r - 1)x(t,\ u,\ v) > 0 \end{cases}.$$

Поскольку все фазовые траектории в задаче (P_2) положительны, то экстремальные управления в силу формулы (3) представляются в виде

$$u(t) = \begin{cases} 0, & (\psi(t,\ u,\ v)rc - 1)x(t) \le 0 \\ 1, & (\psi(t,\ u,\ v)rc - 1)x(t) > 0 \end{cases};$$

$$v(t) = \begin{cases} 0, & (\psi(t,\ u,\ v)r - 1)x(t) \le 0 \\ 1, & (\psi(t,\ u,\ v)r - 1)x(t) > 0 \end{cases}$$

для любой траектории $x(t) \in X$.

Это значит, что в данной задаче любое экстремальное управление является сильно экстремальным. Следовательно, в данном случае любое экстремальное управление является оптимальным (принцип максимума — достаточное условие оптимальности). Общие задачи на поиск экстремального управления конкретизируются в виде

$$(\psi rc - 1)xw \to \max,\quad w \in [0,\ 1],$$
$$(\psi r - 1)xw \to \max,\quad w \in [0,\ 1].$$

Таким образом, максимизирующее управления в поставленной задаче можно записать по формуле

$$u^*(\psi,\ x) = \begin{cases} 0, & (\psi rc - 1)x \le 0 \\ 1, & (\psi rc - 1)x > 0 \end{cases};$$

$$v^*(\psi,\ x) = \begin{cases} 0, & (\psi r - 1)x \le 0 \\ 1, & (\psi r - 1)x > 0 \end{cases}.$$

С учетом условия $x > 0$ получаем максимизирующие управления, не зависящие от фазовой переменной

$$u^*(\psi) = \begin{cases} 0, & \psi rc - 1 \le 0 \\ 1, & \psi rc - 1 > 0 \end{cases};$$

$$v^*(\psi) = \begin{cases} 0, & \psi r - 1 \le 0 \\ 1, & \psi r - 1 > 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим задачу Коши для сопряженного уравнения

$$\dot{\psi} = \psi(\rho - r(cu^* + v^*)) + (u^* + v^* - 1),\ \ \psi(T) = 0$$

Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy, 2015, vol. 25, no. 3, pp. 542–549. ISSN 1993-3541
Известия Иркутской государственной экономической академии. 2015. Т. 25, № 3. С. 542–549. ISSN 1993-3541

с управлениями

$$u^* = u^*(\psi), \quad v^* = v^*(\psi).$$

Пусть $\psi(t)$, $t \in [0, T]$ — решение этого уравнения. Тогда управления $u^*(\psi(t))$, $v^*(\psi(t))$, $t \in [0, T]$ являются оптимальными в поставленной задаче.

Введем гладкие функции переключения, по которым будем отслеживать поведение управлений

$$s_1(t) = \psi(t)rc - 1, \; s_2(t) = \psi(t)r - 1.$$

Заметим, что при $r \in (0, 1]$, $c \in (0, 1)$ возможны следующие ситуации:

– если $\psi(t) > 0$, то $\psi(t)rc - 1 < \psi(t)r - 1 \Leftrightarrow s_1(t) < s_2(t)$;

– если $\psi(t) < 0$, то $\psi(t)rc - 1 > \psi(t)r - 1 \Leftrightarrow s_1(t) > s_2(t)$.

Начнем движение влево из терминальной точки T. Поскольку $\psi(T) = 0$, то $s_1(T) = s_2(T) = -1$. Это означает, что $u^*(\psi(T)) = 0$, $v^*(\psi(T)) = 0$.

Следовательно, для $t \in (T - \varepsilon, T)$, $\varepsilon > 0$ имеем $s_1(t) < 0$, $s_2(t) < 0$. Отсюда вытекает, что $u^*(t) = 0$, $v^*(t) = 0$.

Подставляя в ψ-уравнение, получаем

$$\dot{\psi} = \psi\rho - 1, \quad \psi(T) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\psi(t) = \frac{1}{\rho}\left(1 - e^{\rho(t-T)}\right), \quad t \in (T - \varepsilon, T].$$

Продифференцируем полученное решение

$$\dot{\psi}(t) = \frac{1}{\rho}(-\rho)e^{\rho(t-T)} = -e^{\rho(t-T)} < 0, \qquad t \in (T - \varepsilon, T].$$

Отсюда следует, что функция $\psi(t)$ монотонно убывает на $(T - \varepsilon, T]$. Это означает, что $\psi(t) > 0 \Rightarrow s_1(t) < s_2(t)$, $t \in (T - \varepsilon, T]$.

Таким образом, при движении по t влево из T первой обратится в нуль функция $s_2(t)$.

Решим уравнение $s_2(t) = 0$, т. е.

$$\frac{r}{\rho}(1 - e^{\rho(t-T)}) - 1 = 0.$$

В результате получена точка

$$\theta_1 = T + \frac{\ln\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)}{\rho}.$$

Убедимся в «правильности» найденной точки, поскольку

$$1 - \frac{\rho}{r} \in (0, 1) \text{ (исходное условие } \rho < r),$$

$$\text{то } \ln\left(1 - \frac{\rho}{r}\right) < 0.$$

Следовательно, $\theta_1 < T$. Отметим также, что

$$\psi(\theta_1) = \frac{1}{r}.$$

Рассмотрим *особый случай*: пусть $\theta_1 \le 0$. Это означает, что

$$T \le \frac{1}{\rho}\left|\ln\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)\right|$$

(случай краткосрочного планирования), тогда

$$s_1(t) < 0, \quad t \in [0, T], \quad s_2(t) < 0, \quad t \in (0, T].$$

Следовательно, оптимальное управление в таком случае имеет вид

$$u^*(t) = 0, \quad v^*(t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

Пусть $\theta_1 > 0$. Тогда справедливо $s_1(\theta_1) < 0$, $s_2(\theta_1) = 0$. Предположим, что $s_2(t) > 0$, $t \in (\theta_1 - \varepsilon, \theta_1)$, тогда $u^*(t) = 0$, $v^*(t) = 1$, $t \in (\theta_1 - \varepsilon, \theta_1)$.

Подставляя в ψ-уравнение, получаем

$$\dot{\psi} = \psi(\rho - r), \quad \psi(\theta_1) = \frac{1}{r}.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\psi(t) = \frac{1}{r}e^{(r-\rho)(\theta_1 - t)}, \qquad t \in (\theta_1 - \varepsilon, \theta_1).$$

Заметим, что $\dot{\psi}(t) = \psi(t)(\rho - r) < 0$. Отсюда следует, что $\psi(t) > 0$, $t < \theta_1$.

Проверим предположение $s_2(t) > 0$, $t \in (\theta_1 - \varepsilon, \theta_1)$.

Согласно определению

$$s_2(t) = \psi(t)r - 1 = e^{(r-\rho)(\theta_1 - t)} - 1.$$

Исследуем ее поведение. Функция $s(t) = e^{(r-\rho)(\theta_1 - t)}$ монотонно убывает по $t \in [0, \theta_1]$, поскольку $\dot{s}(t) < 0$, причем $s(\theta_1) = 1$. Следовательно, $s(t) > 1$ для всех $t \in [0, \theta_1)$. Отсюда вытекает, что $s_2(t) > 1$, $t \in [0, \theta_1)$.

Поскольку $\psi(t) > 0$, $t \in [\theta_1 - \varepsilon, \theta_1]$, то $s_1(t) < s_2(t)$. Решение уравнения $s_1(t) = 0$ найдем следующим образом:

$$ce^{(r-\rho)(T-t)} = 1.$$

В результате получена точка

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\ln c}{r - \rho}.$$

Очевидно, что $\theta_2 < \theta_1$. Отметим, что $s_1(t) < 0$, $t \in (\theta_2, \theta_1)$.

Выделим *особый случай*: пусть $\theta_2 \le 0$. Следовательно,

$$\theta_1 \le \frac{|\ln c|}{r - \rho}.$$

Тогда оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = 0, \qquad t \in [0, T],$$

$$v^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \theta_1) \\ 0, & t \in [\theta_1, T] \end{cases}.$$

Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy,
2015, vol. 25, no. 3, pp. 542–549. ISSN 1993-3541

Известия Иркутской государственной экономической академии.
2015. Т. 25, № 3. С. 542–549. ISSN 1993-3541

Пусть $\theta_2 > 0$. Отметим, что $s_1(\theta_2) = 0$,

$$\psi(\theta_2) = \frac{1}{rc}.$$

Предположим, что $s_1(t) > 0$, $t \in (\theta_2 - \varepsilon, \theta_2)$, тогда $u^*(t) = 1$, $v^*(t) = 1$, $t \in (\theta_2 - \varepsilon, \theta_2)$.

Решаем ψ-уравнение

$$\dot{\psi} = \psi(\rho - r(c+1)) + 1, \qquad \psi(\theta_2) = \frac{1}{rc}$$

и получаем функцию

$$\psi(t) = e^{(\theta_2 - t)(r(c+1)-\rho)}\left[\frac{1}{rc} - \frac{1}{r(c+1)-\rho}\right] + \frac{1}{r(c+1)-\rho}.$$

Проверим предположение

$$s_1(t) = cr\psi(t) - 1 =$$

$$= e^{(\theta_2 - t)(r(c+1)-\rho)}\left[1 - \frac{rc}{r(c+1)-\rho}\right] + \frac{rc}{r(c+1)-\rho} - 1 =$$

$$= e^{(\theta_2 - t)(r(c+1)-\rho)}\left[\frac{r-\rho}{r(c+1)-\rho}\right] + \frac{\rho - r}{r(c+1)-\rho} =$$

$$= \frac{r-\rho}{r(c+1)-\rho}\left(e^{(\theta_2 - t)(r(c+1)-\rho)} - 1\right).$$

Так как $r - \rho > 0$ и $r(c+1) - \rho > 0$, то получим

$$\frac{r-\rho}{r(c+1)-\rho} > 0.$$

Функция $e^{(\theta_2 - t)(r(c+1)-\rho)}$, $t \in (0, \theta_2]$ в точке θ_2 равна единице и монотонно убывает, поскольку ее производная меньше нуля. Следовательно, $e^{(\theta_2 - t)(r(c+1)-\rho)} > 1$.

Проверим знак функции $\psi(t)$, $t \in (0, \theta_2)$:

$$\dot{\psi}(t) = e^{(\theta_2 - t)(r(c+1)-\rho)}\left(\frac{\rho - r}{rc}\right) < 0,$$

$$\psi(\theta_2) = \frac{1}{rc} > 0.$$

Следовательно, $\psi(t) > 0$, $t \in (0, \theta_2)$, тогда $s_2(t) > s_1(t) > 0$, $t \in (0, \theta_2)$.

Таким образом, знаки функций переключения $s_2(t)$, $s_1(t)$ на отрезке $[0, T]$ изменяются следующим образом:

$$s_1(t) \begin{cases} > 0, & t \in (0, \theta_2) \\ < 0, & t \in (\theta_2, T) \end{cases};$$

$$s_2(t) \begin{cases} > 0, & t \in (0, \theta_1) \\ < 0, & t \in (\theta_1, T) \end{cases},$$

здесь

$$\theta_1 = T + \frac{\ln\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)}{\rho}; \quad \theta_2 = \theta_1 + \frac{\ln c}{r - \rho}.$$

Итоговое условие $\theta_2 > 0$ приводит к неравенству для конечного времени

$$T > \frac{\left|\ln\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)\right|}{\rho} + \frac{|\ln c|}{r - \rho}.$$

Это случай долгосрочного планирования.

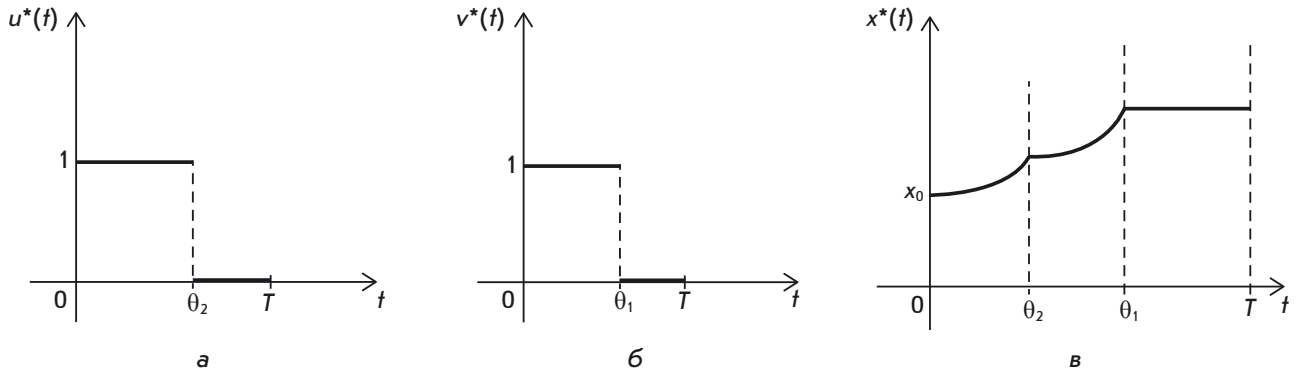
В этом случае оптимальное управление выражается по формулам:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \theta_2) \\ 0, & t \in [\theta_2, T] \end{cases} \text{ (рис., а)};$$

$$v^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \theta_1) \\ 0, & t \in [\theta_1, T] \end{cases} \text{ (рис., б)}.$$

Оптимальная фазовая траектория

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 e^{tr(c+1)}, & t \in [0, \theta_2) \\ x_0 e^{r\theta_2(c+1) + (t - \theta_2)r}, & t \in [\theta_2, \theta_1) \\ x_0 e^{r\theta_2(c+1) + (\theta_1 - \theta_2)r}, & t \in [\theta_1, T] \end{cases} \text{ (рис., в)}.$$



а б в

Графическое изображение оптимального управления и соответствующей ему траектории

Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy, 2015, vol. 25, no. 3, pp. 542–549. ISSN 1993-3541

Известия Иркутской государственной экономической академии. 2015. Т. 25, № 3. С. 542–549. ISSN 1993-3541

Таким образом, содержательная интерпретация оптимального управления имеет вид:

– первый период $[0, \theta_2)$ — вся прибыль идет на инвестиции, берется кредит в размере прибыли;

– второй период $[\theta_2, \theta_1)$ — вся прибыль идет на инвестиции, кредит обнуляется;

– третий период $[\theta_1, T]$ — вся прибыль идет на потребление, кредит равен нулю.

Список использованной литературы

1. Антипина Н. В. Линейные функции Ляпунова-Кротова и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума / Н. В. Антипина, В. А. Дыхта // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2002. — № 12. — С. 11–22.

2. Аргучинцев А. В. Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума / А. В. Аргучинцев, В. А. Дыхта, В. А. Срочко // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2009. — № 1. — С. 3–43.

3. Габасов Р. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — М. : Либроком, 2011. — 272 с.

4. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. — М. : Наука, 1988. — 280 с.

5. Кротов В. Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. — М. : Наука, 1973. — 446 с.

6. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. — М. : Физматлит,1961. — 388 с.

7. Никольский М. С. О достаточности принципа максимума Понтрягина в некоторых оптимизационных задачах / М. С. Никольский // Вестник Московского университета. Сер. 15, Вычислительная математика и кибернетика. — 2005. — № 1. — С. 35–43.

8. Срочко В. А. Достаточные условия оптимальности в задачах управления на основе формул приращения функционалов / В. А. Срочко, В. Г. Антоник, Е. В. Аксенюшкина // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. — 2014. — Т. 8. — С. 125–140.

9. Срочко В. А. Достаточные условия оптимальности экстремальных управлений на основе формул приращения функционала / В. А. Срочко, В. Г. Антоник // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2014. — № 8. — С. 96–102.

10. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления / В. А. Срочко. — М. : Физматлит, 2000. — 160 с.

11. Стрекаловский А. С. Глобальный поиск в невыпуклой задаче оптимального управления / А. С. Стрекаловский, Е. В. Шаранхаева // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2005. — Т. 45, № 10. — С. 1785–1800.

12. Mangasarian O. L. Sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems / O. L. Mangasarian // SIAM J. Control Optim. — 1966. — № 4. — P. 139–152.

References

1. Antipina N. V., Dykhta V. A. Linear Lyapunov-Krotov functions and sufficient conditions for optimality in the form of the maximum principle. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika = Izvestiya of High Schools. Mathematics*, 2002, no. 12, pp. 11–22. (In Russian).

2. Arguchintsev A. V., Dykhta V. A., Srochko V. A. Optimal control: nonlocal conditions, computational methods and the variational principle of maximum. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika = Izvestiya of High Schools. Mathematics*, 2009, no. 1, pp. 3–43. (In Russian).

3. Gabasov R., Kirillova F. M. *Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya* [The maximum principle in optimal control theory]. Moscow, Librokom Publ., 2011. 272 p.

4. Klark F. *Optimizatsiya i negladkii analiz* [Optimization and Nonsmooth Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 280 p.

5. Krotov V. F., Gurman V. I. *Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods and optimal control tasks]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 446 p.

6. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Optimal processes mathematical theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1961. 388 p.

7. Nikol'skii M. S. On adequacy of the Pontryagin's maximum principle in some optimization problems. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika = Bulletin of Moscow University. Series 15, Computational Mathematics and Cybernetics*, 2005, no. 1, pp. 35–43. (In Russian).

8. Srochko V. A., Antonik V. G., Aksenyushkina E. V. Sufficient optimality conditions in control problems based on functional increment formulas. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika = Izvestiya of Irkutsk State Technical University. Series Mathematics*, 2014, vol. 8, pp. 125–140. (In Russian).

9. Srochko V. A., Antonik V. G. Sufficient optimality conditions for extreme control on the basis of functional increment formulas. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika = Izvestiya of High Schools. Mathematics*, 2014, no. 8, pp. 96–102. (In Russian).

10. Srochko V. A. *Iteratsionnye metody resheniya zadach optimal'nogo upravleniya* [Iterative methods for solving optimal control problems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000. 160 p.

Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy, 2015, vol. 25, no. 3, pp. 542–549. ISSN 1993-3541

Известия Иркутской государственной экономической академии. 2015. Т. 25, № 3. С. 542–549. ISSN 1993-3541

11. Strekalovskii A. S., Sharankhaeva E. V. Global search in a nonconvex optimal control problem. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki = The Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2005, vol. 45, no. 10, pp. 1785–1800. (In Russian).

12. Mangasarian O. L. Sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems. *SIAM J. Control Optim*, 1966, no. 4, pp. 139–152.

Информация об авторе

Аксенюшкина Елена Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и эконометрики, Байкальский государственный университет экономики и права, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: aks.ev@mail.ru.

Author

Elena V. Aksenyushkina — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics and Econometrics, Baikal State University of Economics and Law, 11 Lenin St., 664003, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: aks.ev@mail.ru.

Библиографическое описание статьи

Аксенюшкина Е. В. Задача оптимального планирования финансовой политики фирмы / Е. В. Аксенюшкина // Известия Иркутской государственной экономической академии. — 2015. — Т. 25, № 3. — С. 542–549. — DOI : 10.17150/1993-3541.2015.25(3).542-549.

Reference to article

Aksenyushkina E. V. The problem of optimal planning of company's financial policy. *Izvestiya Irkutskoy gosudarstvennoy ekonomicheskoy akademii = Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy*, 2015, vol. 25, no. 3, pp. 542–549. DOI: 10.17150/1993-3541.2015.25(3).542-549. (In Russian).